Correction du devoir maison $n°2$

Partie A : valeur de $\cos(\frac{\pi}{8})$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ d'où $\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}$. Par conséquent $\cos(\frac{\pi}{8})^2 = \frac{\cos(\frac{\pi}{4})+1}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. Or $\cos(\frac{\pi}{8}) > 0$ d'où $\cos(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Partie B : valeur de $\cos(\frac{\pi}{5})$

1. $(E) : (z-1)^5 = (z+1)^5$.
   On remarque que $z = 1$ n'est pas solution. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$.
   (a)
   $$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1 \\ &\iff \exists k \in \{0;1;2;3;4\}, \frac{z+1}{z-1} = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}} \\ &\underset{\substack{k=0 \\ \text{non sol}}}{\iff} \exists k \in \{1;2;3;4\}, z(1-\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}}) = -1-\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}} \\ &\iff \exists k \in \{1;2;3;4\}, z = \frac{\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}}+1}{\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}}-1} \\ &\iff \exists k \in \{1;2;3;4\}, z = \mathbf{i}\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)} = \mathbf{i}\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)} \end{aligned}$$
   Les solutions de (E) sont donc $\left\{\mathbf{i}\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)}; \mathbf{i}\frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)}; -\mathbf{i}\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)}; -\mathbf{i}\frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)}\right\}$
   (b)
   $$z \text{ solution de } (E) \iff -5z^4 - 10z^2 - 1 = 5z^4 + 10z^2 + 1 \iff 5z^4 + 10z^2 + 1 = 0$$
   On résout $(E') : 5Z^2 + 10Z + 1 = 0$. $\Delta = 80$. Donc les solutions de (E') sont $\frac{-10\pm4\sqrt{5}}{10} = \frac{-5\pm2\sqrt{5}}{5}$. Donc les solutions de (E) sont $\pm\mathbf{i}\sqrt{\frac{5\pm2\sqrt{5}}{5}}$.
2. La fonction tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et admet pour dérivée $1 + \tan^2 > 0$, donc tan est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. Par conséquent, $\mathbf{i}\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \mathbf{i}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$.
   D'où $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}} = \sqrt{\frac{5}{5+2\sqrt{5}}}$.
3. On en déduit donc que :
   $$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{50+10\sqrt{5}-20}{100-20}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Partie C : irrationalité de $\cos(\frac{\pi}{9})$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   $$\cos(3a) = \mathfrak{Re}\left(\mathbf{e}^{3\mathbf{i}a}\right) = \mathfrak{Re}\left((\cos(a) + \mathbf{i}\sin(a))^3\right) = \cos^3(a) - 3\cos(a)\sin^2(a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$$

2. Pour $a = \frac{\pi}{9}$, on trouve : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$.
   Par conséquent, $4\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - \frac{1}{2} = 0$.
   Donc $\cos(\frac{\pi}{9})$ est solution de l'équation $8x^3 - 6x - 1 = 0$.
3. Par l'absurde, supposons que $\cos(\frac{\pi}{9})$ est rationnel. On notera p et q deux entiers naturels, non nuls et premiers entre eux, tels que $\cos(\frac{\pi}{9}) = \frac{p}{q}$.
   (a) On a $8p^3 - 6pq^2 - q^3 = 0$, d'où $p\underbrace{(8p^2 - 6q^2)}_{\in\mathbb{N}} = q^3$. Donc p divise q^3.
   (b) Par l'absurde, supposons que $p \neq 1$. D'où $p \in [\![2; +\infty[\![$. Par conséquent p admet un diviseur premier r. D'après la question précédente, r divise q^3. D'après le lemme d'Euclide, r divise q, ce qui est absurde car p et q sont premiers entre eux.
   D'où $p = 1$.
   (c) On a $8 = 6q^2(q + 1)$. On remarque que les entiers de parité opposé q et $q + 1$ divise 8. Or le seul diviseur impair et positif de 8 est 1. Par conséquent $q = 1$ ou $q + 1 = 1$ ce qui est absurde.
   Conclusion : $\cos(\frac{\pi}{9})$ est irrationnel.